Colles de Maths - semaine 9 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Théorèmes d'interversion

Exercice 1 Déterminer $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.

Exercice 2 Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ et $a > 0$. Déterminer $\lim_{a\to 0^+} \displaystyle\int_0^a \frac{f(t)}{\sqrt{t\,(a-t)}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{2\,(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 4 Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1}.$$

En déduire une expression de $\ln 2$ sous forme de série.

Exercice 5 Donner un développement asymptotique à deux termes quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 Soit $T > 0$ et $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ continue.

1. Déterminer la limite simple de la suite $g_n : t \in [0,T] \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u)\,e^{-kn(t-u)}\,\mathrm{d}u$.
2. On suppose que $\displaystyle\left(\int_0^T f(t)\,e^{nt}\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $f = 0$.

Convergence simple et convergence uniforme

Exercice 7 Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions

$$f_n(x) = (-1)^n \sin^{\circ n}(x)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ ($\circ\, n$ signifie composée n fois).

Exercice 8 Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Approximation uniforme

Exercice 9 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Que dire de f ?

Exercice 10 Soit $d \in \mathbb{N}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales de degré au plus d, qui converge simplement sur $\mathbb{R}$. Montrer que la limite est une fonction polynomiale de degré au plus d, et que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.